ELEKTROMOTORNI POGON
KAO
DINAMIČKI SISTEM

Elektromotorni pogon je jedan DINAMIČKI SISTEM, koji se može podeliti na više DINAMIČKIH PODSISTEMA između kojih postoji INTERAKCIJA.

DINAMIČKI SISTEM – PODSISTEM može biti realan (opipljiv), ili apstraktan.

Dinamički sistemi koje ćemo mi proučavati su realni.

Zajedničko za sve dinamičke sisteme – podsisteme je da oni predstavljaju skup uzajamno zavisnih, vremenski promenljivih veličina. Ove zavisnosti mogu se izraziti:

- skupom diferencijalnih jednačina prvog reda; i
- skupom algebarskih jednačina;

koje se mogu napisati:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = f_i\left(x_1,\dots,x_n,u_1,\dots,u_k,t\right) \quad i = 1 \div n$$

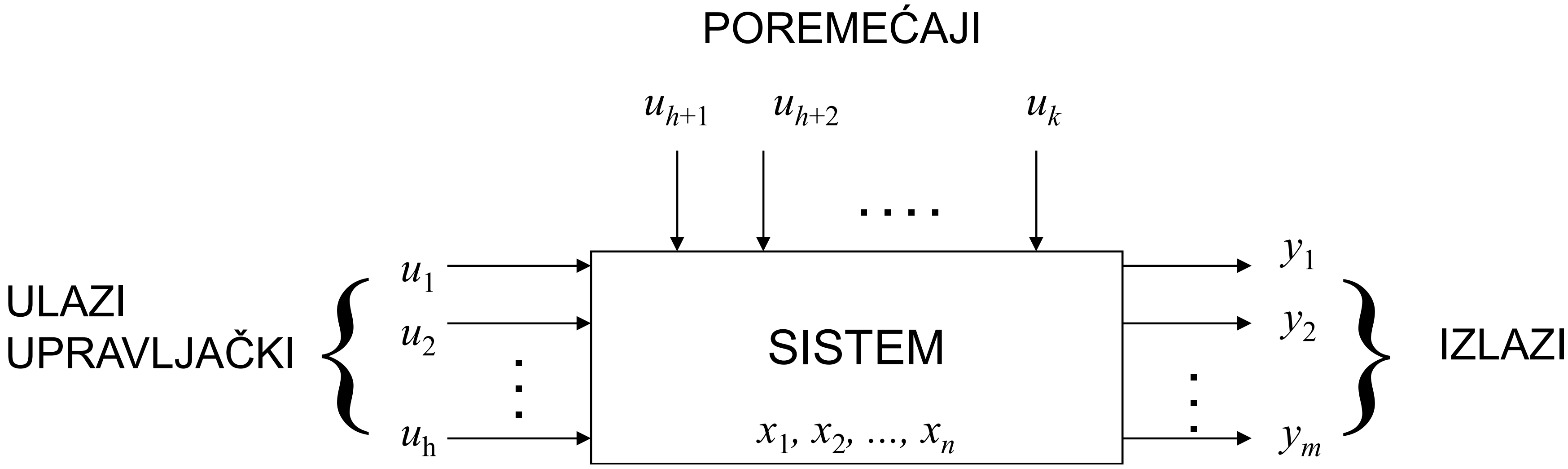
$$y_j = y_j\left(x_1,\dots,x_n,u_1,\dots,u_k,t\right) \quad j = 1 \div m$$

gde su:

$u_1,\dots,u_k$ – ulazne veličine u sistem, koje se po svojoj funkciji mogu podeliti na upravljačke veličine i poremećaje;

$x_1,\dots,x_n$ – promenljive stanja;

$y_1,\dots,y_m$ – izlazi, izlazne veličine.



Važna osobina dinamičkog sistema: Ustaljenost dejstva, ulazi deluju na proces (promenljive stanja) i izlaze, proces deluje na izlaze a izlazi i proces ne deluju na ulaze!

Možemo razlikovati:

- fizički pristupačne veličine, ili merljive;
- nepristupačne veličine, ili nemerljive.

ANALIZA DINAMIČKIH SISTEMA

Dve metode:

1. **Analiza u operatorskom domenu (frekventnom)**
2. **Analiza u prostoru stanja**

ANALIZA U OPERATORSKOM DOMENU

Može se primeniti na sisteme:

- koji su linearni;
- imaju konstantne parametre; i
- imaju jedan ulaz i jedan izlaz, ili u slučaju većeg broja ulaza i izlaza posmatrani slučaj se može svesti na slučaj sa jednim ulazom i jednim izlazom.

Zasniva se na LAPLASOVOJ transformaciji.

LAPLASOVA TRANSFORMACIJA

$$F(p) = £(f(t)) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} dt$$

Umesto promenljive *t* – vreme, uvodi se promenljiva “*p*” – Laplasov operator, kompleksna promenljiva:

$$p = \sigma + j \cdot \omega = \xi \cdot \omega_n + j \cdot \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$

Gde je: σ – prigušenje;

ω – sopstvena učestanost;

ξ – relativno prigušenje;

ω_n – prirodna učestanost.

Pierre-Simon Laplace
1749-1827

Primenom ove metode analize posmatrani sistem se svodi na:

$$u\,(p) \longrightarrow \boxed{G(p)} \longrightarrow y\,(p)$$

$$G(p) = \frac{y}{u}(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Funkcija prenosa

Drugi način označavanja funkcije prenosa, pogodan kod analize sistema sa više ulaza i izlaza jer eksplicitno pokazuje na koji par ulaza i izlaza se odnosi data funkcija.

Funkcija prenosa svodi se na odnos dva polinoma po operatoru p.

Funkcija prenosa predstavlja odnos Laplasovih transformacija izlaza i ulaza.

$D(p)$ – polinom naziva se KARAKTERISTIČNI POLINOM.

$D(p) = 0$ – je KARAKTERISTIČNA JEDNAČINA.

Red karakterističnog polinoma je jednak broju promenljivih stanja u dinamičkom sistemu.

Na osnovu rešenja karakteristične jednačine p_i, gde je $i = 1 \div n$, mogu se dobiti vrlo važne informacije o ponašanju sistema.

1° Ako je: $\mathrm{Re}[\, p_i \,] < 0$ za svako $i = 1 \div n$ sistem je stabilan, algebarski kriterijum stabilnosti.

2° Ako je: $\mathrm{Im}[\, p_i \,] = 0$ za svako $i = 1 \div n$ i ako je sistem stabilan, promene promenljivih u prelaznim režimima biće APERIODIČNE.

3° Ako je: $\mathrm{Im}[\, p_i \,] \neq 0$ makar za jedno $i = 1 \div n$ i ako je sistem stabilan, promene promenljivih sistema u prelaznim režimima biće PERIODIČNO PRIGUŠENE.

$N(p) = 0$ – Rešenja ove jednačine nazivaju se NULAMA SISTEMA.

Broj POLOVA je veći ili jednak broju NULA sistema.

DOMINANTNI POL (polovi u slučaju konjugovano – kompleksnog para) je pol koji je najbliži imaginarnoj osi posmatrano u kompleksnoj ravni, odnosno pol sa najmanjom apsolutnom vrednošću realnog dela. DOMINANTNI POL ima najveći uticaj na prelazne procese.

NEDOMINANTNI POLOVI su polovi čija je apsolutna vrednost realnog dela više od DESET puta veća od apsolutne vrednosti DOMINANTNOG POLA. Uticaj NEDOMINANTNIH POLOVA na prelazne procese je zanemarljiv.

DIPOLI su parovi bliskih polova i nula, posmatrano u kompleksnoj ravni. Uticaj polova koji grade DIPOLE na prelazne procese je zanemarljiv.

Važne relacije:

$$\pounds\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f\left(0^{+}\right)$$

$$\pounds\left[\int_{0}^{t} f(t)\,dt\right] = \frac{F(p)}{p}$$

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to\infty} pF(p) \qquad \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p)$$

Jedinična odskočna funkcija

$$h(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad \pounds\left[h(t)\right] = \frac{1}{p}$$

Jedinična impulsna funkcija

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\cdot dt = 1 \qquad \pounds\left[\delta(t)\right] = 1$$

Jedinična nagibna funkcija

$$\pounds\left[t\cdot h(t)\right] = \frac{1}{p^{2}}$$

ANALIZA U PROSTORU STANJA

Ovo je analiza u VREMENSKOM domenu!

Matematički aparat koji se koristi u bilo kom vidu ove analize skoro po pravilu ZAHTEVA PRIMENU RAČUNARA.

Može se primeniti na sisteme:

- linearne i nelinearne;
- sa konstantnim i promenljivim parametrima;
- sa više ulaza i izlaza.

Dva sistema jednačina (*DIFERENCIJALNIH I ALGEBARSKIH*) koji opisuju ponašanje dinamičkog sistema uvođenjem:

VEKTOR STANJA $$\vec{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$$

VEKTOR ULAZA $$\vec{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_k]^T$$

VEKTOR IZLAZA $$\vec{y} = [y_1, y_2, \ldots, y_m]^T$$

Dobijaju oblik:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{u}, t)$$

$$\vec{y} = \vec{y}(\vec{x}, \vec{u}, t)$$

Potpuno definisanje određenog režima u sistemu postiže se definisanjem početnih uslova:

$$\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0)$$

LINEARAN DINAMIČKI SISTEM

Matematički model sistema može se predstaviti:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = a_{ig} x_i + b_{il} u_l \qquad i = 1, \ldots, n \qquad g = 1, \ldots, n$$

$$y_j = c_{ji} x_i + d_{jl} u_l \qquad j = 1, \ldots, m \qquad l = 1, \ldots, k$$

Odnosno:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = A \cdot \vec{x} + B \cdot \vec{u}$$

$$\vec{y} = C \cdot \vec{x} + D \cdot \vec{u}$$

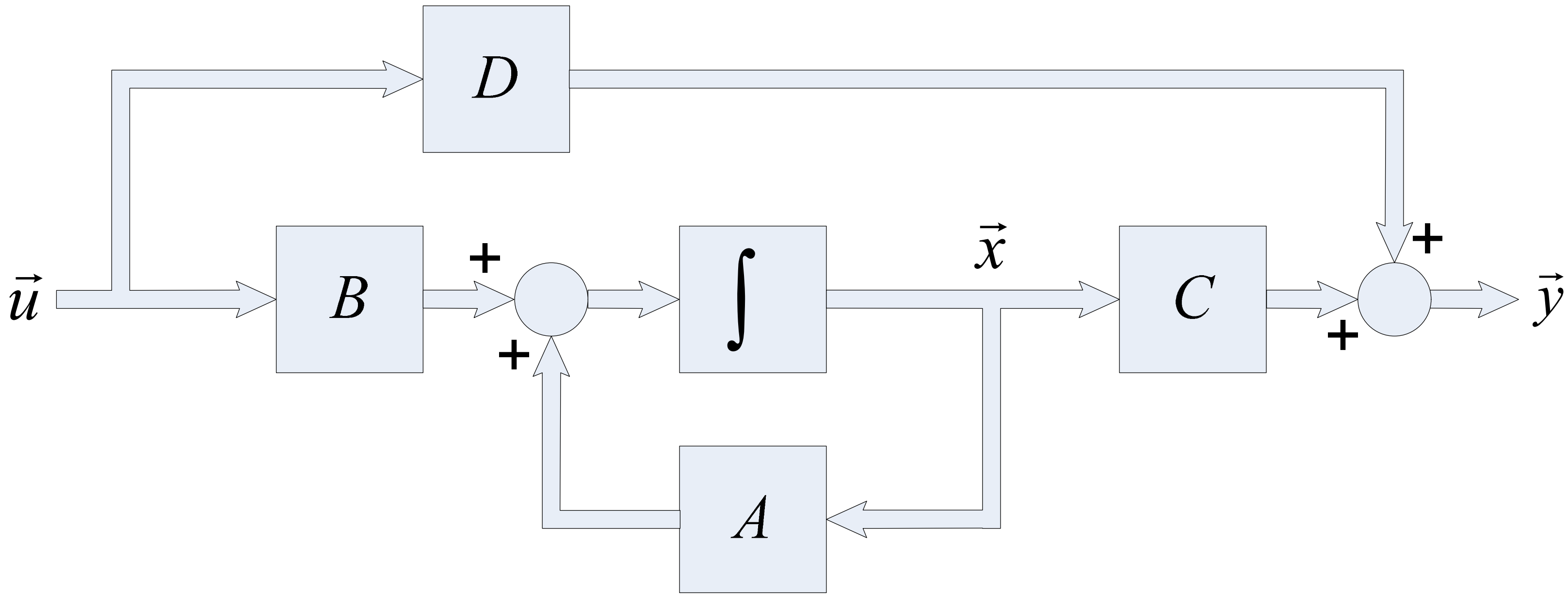
gde su: A – matrica sistema,

B – matrica ulaza,

C – matrica izlaza,

D – nema posebno ime, u većini realnih sistema ova matrica je “nula” matrica.

Grafički prikaz sistema u prostoru stanja.



Funkcije prenosa linearnog dinamičkog sistema

Kod linearnih sistema moguće je izvesti funkcije prenosa, kao što smo već videli. Primenom Laplasove transformacije na sistem jednačina koje opisuju dinamički sistem dobija se:

$$p \cdot I \cdot \vec{x}(p) = A \cdot \vec{x}(p) + B \cdot \vec{u}(p)$$

$$\vec{y}(p) = C \cdot \vec{x}(p) + D \cdot \vec{u}(p)$$

Gde je I – jedinična matrica.

Iz prve jednačine dobija se:

$$\vec{x}(p) = (p \cdot I - A)^{-1} B \cdot \vec{u}(p)$$

Smenom u drugu jednačinu dobija se:

$$\vec{y}(p) = \left[C \cdot (p \cdot I - A)^{-1} B + D \right] \cdot \vec{u}(p)$$

Funkcija prenosa sistema je:

$$S(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = C \cdot (p \cdot I - A)^{-1} B + D = H(p)$$

gde je: $H(p)$ – matrica prenosa,

Koeficijenti matrice prenosa su funkcije prenosa od svih ulaza ka svim izlazima.

Ako je $D = [\ 0\ ]$ tada je:

$$S(p) = H(p) = \frac{C \cdot \left[\operatorname{adj}(p \cdot I - A) \right] \cdot B}{\det(p \cdot I - A)} = \begin{bmatrix} F_{11}(p) & \dots & F_{1k}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ F_{m1}(p) & \dots & F_{mk}(p) \end{bmatrix}$$

U matrici prenosa:

broj kolona = broju ulaza,

broj redova = broju izlaza.

Na osnovu prethodnog izraza očigledno je da se u imeniocu svake od funkcija prenosa $F_{ji}(p)$ nalazi polinom:

$$\det\left(p\cdot I - A\right) = D\left(p\right)$$

Ovo je zapravo *KARAKTERISTIČNI POLINOM!*

KARAKTERISTIČNA JEDNAČINA je:

$$\det\left(p\cdot I - A\right) = D\left(p\right) = 0$$

njena rešenja su *POLOVI SISTEMA.*

SOPSTVENE VREDNOSTI MATRICE SU REŠENJA SLEDEĆE JEDNAČINE:

$$\det\left(\lambda\cdot I - A\right) = 0$$

Prema tome:

POLOVI SISTEMA SU SOPSTVENE VREDNOSTI MATRICE SISTEMA

NELINEARNI DINAMIČKI SISTEM SA KONSTANTNIM PARAMETRIMA

Kod ovih sistema vrši se linearizacija modela u okolini radne tačke stacionarnog stanja, a zatim se mogu primenjivati metode analize kao kod linearnih sistema.

Postupkom linearizacije dobija se *linearni model* sistema koji *važi samo u okolini posmatrane radne tačke* i kod koga umesto *promenljivih* figurišu *priraštaji promenljivih.*

Kod linearizovanog modela je:

VEKTOR STANJA
$$\Delta\vec{x} = \left[\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\right]^T$$

VEKTOR ULAZA
$$\Delta\vec{u} = \left[\Delta u_1, \Delta u_2, \ldots, \Delta u_k\right]^T$$

VEKTOR IZLAZA
$$\Delta\vec{y} = \left[\Delta y_1, \Delta y_2, \ldots, \Delta y_m\right]^T$$

Koordinate tačke stacionarnog stanja (obeležavaju se dodavanjem indeksa “0”) u okolini koje se vrši linearizacija, dobijaju se iz sledećih jednačina:

$$\lim_{t\to\infty} f_i\left(x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_k,t\right) = f_{i0}\left(x_{10},\ldots,x_{n0},u_{10},\ldots,u_{k0}\right) = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} y_j = y_{j0} = y_{j0}\left(x_{10},\ldots,x_{n0},u_{10},\ldots,u_{k0}\right)$$

$$i = 1 \div n, \qquad j = 1 \div m$$

Koeficijenti matrice sistema su parcijalni izvodi u posmatranoj radnoj tački:

$$a_{ig} = \frac{\partial f_i}{\partial x_g}$$

Koeficijenti matrice ulaza su:

$$b_{il} = \frac{\partial f_i}{\partial u_l}$$

Koeficijenti matrice izlaza su:

$$c_{ji} = \frac{\partial y_j}{\partial x_i}$$

Koeficijenti matrice D:

$$d_{jl} = \frac{\partial y_j}{\partial u_l}$$

NELINEARNI DINAMIČKI SISTEM SA PROMENLJIVIM PARAMETRIMA

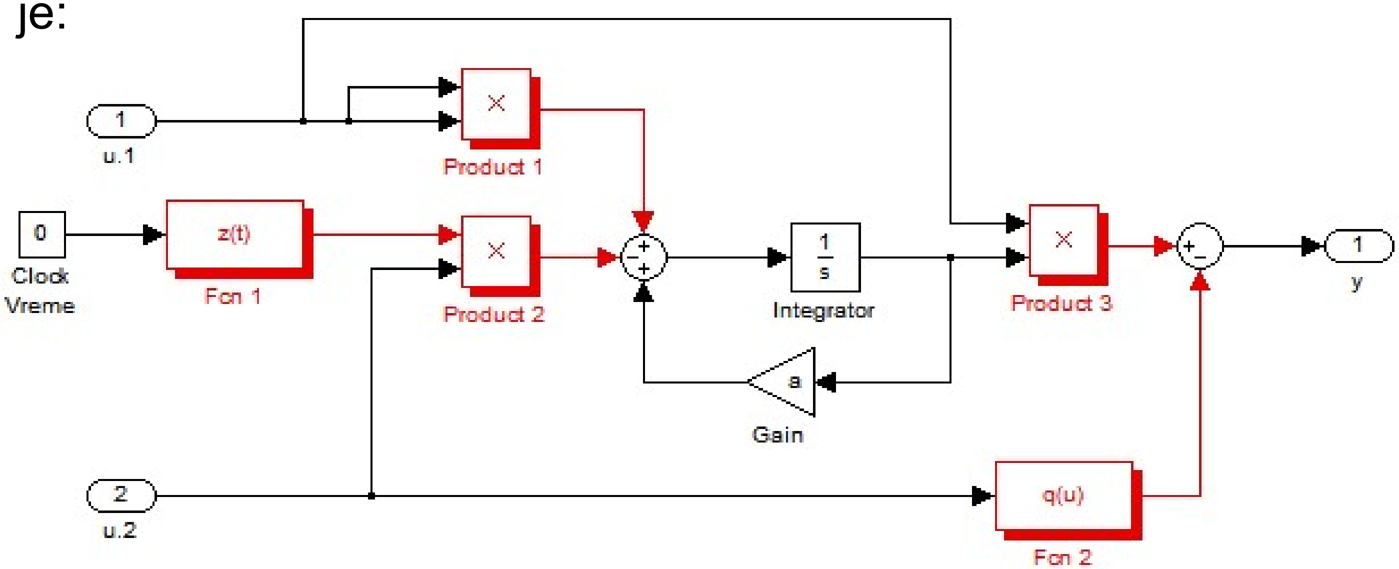
Kod ovih sistema analiza se sprovodi modelovanjem. Danas se to radi sa digitalnim računarima pomoću odgovarajućih programskih paketa namenjenih modelovanju.

Ilustracije radi poslužimo se primerom. Model sistema prvog reda je:

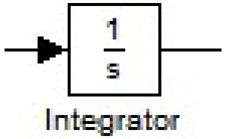
$$\frac{\partial x}{\partial t} = a \cdot x + u_1^2 - z(t) \cdot u_2$$

$$y = x \cdot u_1 - q(u_2)$$

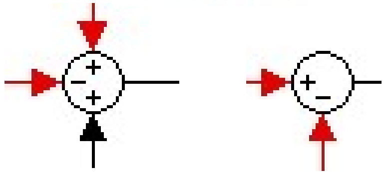
Grafički prikaz ovog modela na osnovu koga se vrši postavljanje modela na računaru je:



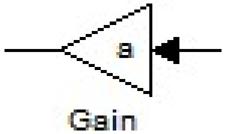
Oznake korišćene u modelu



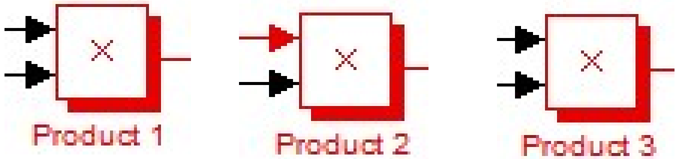
integrator



sumator; sabiranje ulaza sa alg. predznakom

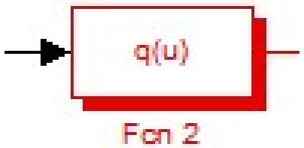


pojačanje, množenje konstantom a;



množač, množenje ulaza

z – nelinearna funkcija od vremena



q – nelinearna funkcija od ulaza u_2;

nelinearni blokovi